Prof. Dr Vojislav Andrić

JEDNAČINE I NEJEDNAČINE SA APSOLUTNIM VREDNOSTIMA

Problemi sa apsolutnim vrednostima predstavljaju materiju koja efikasno sintetizuje sadržaje o linearnim jednačinama i nejednačinama. Pre nego što sintetičnost navedene materije ilustrujemo karakterističnim primerima podsetimo se definicije apsolutne vrednosti realnog broja:

$$\text{Ako je } a \in \mathrm{R}, \text{ onda je } |\,a\,| = \begin{cases} a \ \ ako \ \ je \ a > 0 \\ 0 \ \ ako \ \ je \ a = 0 \\ -a \ \ ako \ \ je \ \ a < 0 \end{cases}.$$

Definicija apsolutne vrednosti realnog broja se analogno prenosi i na apsolutnu vrednost izraza što znači da je apsolutna vrednost izraza I jednaka samom sebi, tj. I ako je izraz I pozitivan, 0 ako je $I = 0$ i jednak je $-I$ ako je izraz I negativan.

PRIMER 1:

Odredi skup rešenja jednačine $|x - 1| + x = |x + 1|$

Rešenje: Treba posmatrati izraze $x - 1$ i $x + 1$ i njihov znak.

x – 1 ________________________ ___________ 0 ___________ 1 ________________
– + + + + + + + + + +
x + 1 ______________________- 1 ___________ 0 ___________ 1 ________________
– – – – – – – – – – – – – – – – – +

Zbog toga razlikujemo pet slučajeva koji su vezani za tri intervala: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ i $(1, \infty)$ i dve granice uočenih intervala: -1 i 1.

1) Ako je $x < -1$, onda je $x - 1 < -2 < 0$ i $x + 1 < 0$ i jednačina postaje $-(x - 1) + x = -(x + 1)$ ili $1 = -x - 1$, pa je $x = -2$. Kako broj -2 pripada posmatranom intervalu, to smo dobili jedno rešenje.
2) Ako je $x = -1$, dobijamo da je $1 = 0$, pa -1 nije rešenje jednačine.
3) Ako je $-1 < x < 1$, onda je $x - 1 < 0$, a $x + 1 > 0$ i jednačina postaje $-(x - 1) + x = x + 1$ ili $1 = x + 1$, pa je $x = 0$. Kako broj 0 pripada posmatranom intervalu, te smo dobili jedno rešenje.
4) Ako je $x = 1$ dobija se $1 = 2$, što znači da $x = 1$ nije rešenje jednačine.
5) Ako je $x > 1$, onda je $x - 1 > 0$ i $x + 1 > 0$, pa se dobija se jednačina $x - 1 + x = x + 1$ ili $x = 2$. Kako broj 2 pripada posmatranom intervalu, broj 2 je rešenje date jednačine.

Dakle skup rešenja jednačine je $S = \{-2, 0, 2\}$.

PRIMER 2:

Reši nejednačinu $|x - 2| + |4 + x| < 6x$.

Rešenje: Kako je apsolutna vrednost izraza uvek nenegativna važi nejednakost $0 \le |x - 2| + |4 + x| < 6x$, pa je $x > 0$. To skraćuje rešavanje nejednačine, jer je dovoljno posmatrati dva intervala: $(0, 2)$ i $[2, \infty)$.

1) Ako je 0 < x < 2, nejednačina je ekvivalentna sa 2 – x + 4 + x < 6x, tj. onda je 6 < 6x, pa je x > 1, odnosno 1 < x < 2.

2) Ako je x ≥ 2, onda dobijamo nejednačinu x – 2 + 4 + x < 6x ili 2 < 4x. Rešenje dobijene nejednačine je $x > \frac{1}{2}$, a kako je interval u kome se nejednačina posmatra x ≥ 2, to je rešenje nejednačine u ovom intervalu x ≥ 2.

Prema tome, skup rešenja nejednačine je S = (1, 2) ∪ [2, ∞) = (1, ∞).

PRIMER 3:

Odredi skup rešenja jednačine: ||||| x | + x | + x | + x | + x | = 2000.

Rešenje: Razlikujemo tri slučaja:

1) Ako je x < 0, onda je | x | = – x, pa data jednačina postaje |||| - x + x | + x | + x | + x | = 2000 ili ||| x | + x | + x | = 2000. Daljom transformacijom se dobija || – x + x | + x | = 2000, tj. | x | = 2000. Rešenje jednačine je – 2000.

2) Ako je x = 0, jednačina nema rešenje, jer je 0 ≠ 2000.

3) Ako je x > 0, onda je | x | = x, pa data jednačina postaje |||| x + x | + x | + x | + x | = 2000 ili |||| 2x | + x | + x | + x | = 2000. Daljom transformacijom jednačine se dobija ||| 2x + x | + x | + x | = 2000, tj. || 3x | + x | + x | = 2000 i u sledećim koracima || 4x | + x | = 2000, odnosno | 5x | = 2000. Rešenje jednačine je 400.

Skup rešenje date jednačine je S = {– 2000, 400}.

PRIMER 4:

Data je jednačina || x – 2 | – 1| = a . Za koju vrednost parametra a jednačina ima najveći broj rešenja?

Rešenje: U prvom koraku posmatrajmo funkciju $y = || x - 2 | - 1|$.

Posmatrana funkcija postaje $y = \begin{cases} |2 - x - 1| = |1 - x| & ako\ je\ x < 2 \\ |x - 2 - 1| = |x - 3| & ako\ je\ x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 1 - x & ako\ je\ x < 1 \\ x - 1 & ako\ je\ 1 \leq x < 2 \\ 3 - x & ako\ je\ 2 \leq x < 3 \\ x - 3 & ako\ je\ x \geq 3 \end{cases}$

GRAFIK

U drugom koraku posmatramo presek dobijene funkcije i prave $y = a$.
Ako je a < 0 jednačina nema rešenja, jer prava $y = a$ ne seče grafik funkcije $y = || x - 2 | - 1|$.
Ako je a = 0 jednačina ima dva rešenja, jer prava $y = a$ seče grafik funkcije $y = || x - 2 | - 1|$ u dvema tačkama (1, 0) i (3, 0).

Ako je 0 < a < 1 jednačina ima 4 rešenja, jer prava y = a seče grafik funkcije $y = || x - 2 | - 1|$ u četiri tačke: $(1 - a, a)$; $(1 + a, a)$; $(3 - a, a)$; $(3 + a , a)$.
Ako je a = 1, jednačina ima 3 rešenja, jer prava $y = a$ seče grafik funkcije $y = || x - 2 | - 1|$ u tri tačke: (0, 1), (2, 1) i (4, 1).
Ako je a > 1, jednačina ima 2 rešenja, jer prava $y = a$ seče grafik funkcije $y = || x - 2 | - 1|$ u dvema tačkama: $(1 - a, a)$ i $(3 + a, a)$.
Prema tome najveći broj rešenja je četiri i dobija se ako je 0 < a < 1.

Za apsolutnu vrednost se vezuje i još jedna važna jednakost koja je poznata iz prethodnih razreda. To je jednakost $\sqrt{a^2} = |a|$ koja važi za svaki realan broj. Naredni primer pokazuje kako se navedena jednakost efikasno primenjuje.

PRIMER 5:

Ako je $1 \le a \le 2$, onda je $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} = 2$. Dokaži.

Rešenje: Neka je A $= \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

Tada je A $= \sqrt{a - 1 + 2\sqrt{a-1} + 1} + \sqrt{a - 1 - 2\sqrt{a-1} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2} =$

$= \left|\sqrt{a-1}+1\right| + \left|\sqrt{a-1} - 1\right|$. Kako je $1 \le a \le 2$, to je $0 \le a - 1 \le 1$. Sledi i da je $0 \le \sqrt{a-1} \le 1$.

Zbog toga je $1 \le \sqrt{a-1} + 1 \le 2$ i $-1 \le \sqrt{a-1} - 1 \le 0$, pa je $\left|\sqrt{a-1} + 1\right| = \sqrt{a-1} + 1 \ge 1$ i

$\left|\sqrt{a-1} - 1\right| = 1 - \sqrt{a-1} \ge 0$.

Uzimajuću u obzir ove dve poslednje činjenice dobija se A $= \left|\sqrt{a-1}+1\right| + \left|\sqrt{a-1} - 1\right| =$

$\sqrt{a-1} + 1 + 1 - \sqrt{a-1} = 2$.

ZADACI

1. Reši sledeće jednačine:
   a) $|x| = 3$
   b) $|x - 1| = 5$
   c) $|3x - 12| = 2x - 3$
   d) $|2x| + x = 6$
   e) $|x| + |x - 2| = 8$
   f) $|x| - |x + 1| = |x - 2|$
   g) $||x + 3| - x| = 7$
   h) $|x + 3| - x = |x + 9|$
   I) $|x| + |x + 1| + |x + 2| = 9$
   j) $|x + |x - 1|| = |x - 2 + |x + 1||$
2. Rešiti jednačinu $|x^2 + 200| - |x^2 - 2x + 100| = 4122$.
3. Odrediti skup rešenja sledećih jednačina:
   $a)\ \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 5$
   $b)\ \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 7$
   $c)\ \sqrt{x^2 + 8x + 16} = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

4. Rešiti sledeće nejednačine

a) $|2x| < 14$

b) $|3x - 2| > 1$

c) $|4x - 12| < 3x - 2$

d) $|5x| + x > 12$

e) $|6x| + |7x - 2| < 11$

f) $|x - 1| + |x + 1| > 2x$

g) $||x + 3| - x| < 9$

h) $|x + 19| - x > |x + 7|$

i) $|2x| + |3x + 1| – |x + 2| < 15$

j) $|x + |x - 1|| > |x - 2 + |x + 1|$

5. Reši nejednačine: $a)\ \sqrt{x^2 - 10x + 25} - |x| < 5$
b) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} > |x| + 2x - 3$.

6. Reši jednačinu: $|x – |x – |x||| = 2007$.

7. Koliko rešenja ima jednačina $|x + |2x + |4x||| = 2009$.

8. Dokazati da jednačina $|2 – |1 – |x||| = 1$ ima pet realnih rešenja.

9. Odrediti najmanji realan broj A takav da za bilo koji realan broj x, za koji je $|x – 2| < 0,04$, važi da je $|x^2 – 5| < A$.

10. Odrediti skup tačaka u xOy ravni čije koordinate zadovoljavaju jednakost $y = |x| + x$.

11. Koliko ima tačaka M(x, y) u koordinatnoj xOy ravni čije su obe koordinate x i y celobrojne, ako je $|x| + |y| < 10$.

12. Odrediti realni parametar a tako da jednačina $|x – 1| + |x + 1| = ax$ ima najveći mogući broj realnih rešenja.

13. Odrediti sve realne brojeve a za koje jednačina $|x + 1| + |x – 2| + x = |x| + a$ ima beskonanačno mnogo rešenja.

14. Jednačinom $26|x| + 154|y| = 2002$ u xOy ravni je određen jedan paralelogram. Odrediti površinu tog paralelograma.

15. Na kružnici je napisano 9 realnih brojeva. Svaki od napisanih brojeva jednak je apsolutnoj vrednosti razlike dva sledeća broja gledajući u smeru kazaljki na časovniku. Zbir svih napisanih brojeva je 1. Odredi o kojim brojevima se radi.

16. U temenima kocke su napisani su brojevi 1, 2, 3, ..., 7, 8, a na svakoj ivici apsolutna vrednost razlike brojeva koji su upisani na krajevima te ivice. Koliko najmanje različitih brojeva može biti napisano na ivicama kocke?

17. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{100}, x_{101}$ različiti prirodni brojevi iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 100, 101\}$. Odredi najmanju, odnosno najveću vrednost izraza $||\ldots||x_1 – x_2| – x_3| – x_4 – \ldots |– x_{100}| – x_{101}|$.

REŠENJA

1. a) $x_1 = -3,\ x_2 = 3$ b) $x_1 = -4,\ x_2 = 6$
   c) $x_1 = 3, x_2 = 9$ d) $x_1 = -6,\ x_2 = 2$
   e) $x_1 = -3,\ x_2 = 5$ f) jednačina nema rešenja
   g) $x_1 = -5$ h) $x_1 = -4$
   i) $x_1 = -4,\ x_2 = 2$ j) $S = \{ 0 \} \cup [1, \infty)$.

2. Kako je $x^2 + 200 > 0$ i $x^2 - 2x + 100 = x^2 - 2x + 1 + 99 = (x-1)^2 + 99 > 0$, to data jednačina postaje $x^2 + 200 - x^2 + 2x - 100 = 4122$. Dakle, $2x = 4022$, pa je $x = 2011$.

3. a) Data jednačina je ekvivalentna sa $| x - 3 | = 5$, pa je $x_1 = -2,\ x_2 = 8$

   b) Data jednačina je ekvivalentna sa $| x | + | x - 1 | = 7$ i $x_1 = -3,\ x_2 = 4$

   c) Data jednačina je ekvivalentna sa $| x + 4 | = | x - 2 |$, pa je $x_1 = -1$.

4. a) $S = (-7, 7)$ b) $S = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$
   c) $S = (2, 10)$ d) $S = (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$
   e) $S = \left(-\frac{9}{13}, 1\right)$ f) $S = (-\infty, 1)$
   g) $S = (-6, \infty)$ h) $S = (-\infty, 12)$
   i) $S = \left(-\frac{7}{2}, 4\right)$ j) $S = (0, 1)$

5. a) $x > 0$ b) $S = \left(-\infty, \frac{6}{5}\right)$.

6. Ako je $x < 0$, onda je $| x | = -x$ i jednačina postaje $| x - | x + x || = 2007$, tj. $| x - | 2x || = 2007$. Slično iz $| x - | 2x || = 2007$ dobija se $| x + 2x | = 2007$ i na kraju $-3x = 2007$, pa je $x = -669$.

   Ako je $x \geq 0$, onda je $| x | = x$ i jednačina postaje $| x - | x - x || = 2007$, tj. $| x | = 2007$. Sledi da je $x = 2007$.

   Sva rešenja date jednačine su -669 i 2007.

7. Dva $x_1 = -2009$ i $x_2 = 287$.

8. Neka je $y = | 2 - | 1 - | x ||| = \begin{cases} |2 - |1 + x|| & ako\ je\ x < 0 \\ |2 - |1 - x|| & ako\ je\ x \geq 0 \end{cases} =$

$$\begin{cases} |2 + 1 + x| = |3 + x| & ako\ je\ x < -1 \\ |2 - 1 - x| = |1 - x| & ako\ je\ -1 \leq x < 0 \\ |2 - 1 + x| = |1 + x| & ako\ je\ 0 \leq x < 1 \\ |2 + 1 - x| = |3 - x| & ako\ je\ 1 \leq x \end{cases} = \begin{cases} -3 - x & ako\ je\ x < -3 \\ 3 + x & ako\ je\ -3 \leq x < -1 \\ 1 - x & ako\ je\ -1 \leq x < 0 \\ 1 + x & ako\ je\ 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & ako\ je\ 1 \leq x < 3 \\ x - 3 & ako\ je\ 3 \leq x \end{cases}$$

GRAFIK

Prava $y = 1$ seče grafik funkcije $y = | 2 - | 1 - | x |||$ u pet tačaka : (– 4, 1), (– 2, 1), (0, 1), (2, 1), (4, 1), što znači da jednačina ima pet rešenja.

9. Ako je $| x - 2 | < 0{,}04$, onda je $-0{,}04 < x - 2 < 0{,}04$, pa je $1{,}96 < x < 2{,}04$ i $3{,}8416 < x^2 < 4{,}1616$. Tada je $-1{,}1584 < x^2 - 5 < -0{,}8384$, pa je $| x^2 - 5 | < 1{,}1584 = A$.

10. $y = | x | + x = \begin{cases} 0 & ako\ je\ x < 0 \\ 2x & ako\ je\ x \geq 0 \end{cases}$.

11. Skup tačaka koje zadovoljavaju jednakost $| x | + | y | = 10$ je $\begin{cases} x + y = 10 & ako\ je\ x > 0\ i\ y > 0 \\ -x + y = 10 & ako\ je\ x < 0\ i\ y > 0 \\ -x - y = 10 & ako\ je\ x < 0\ i\ y < 0 \\ x - y = 10 & ako\ je\ x > 0\ i\ y < 0 \end{cases}$

.

SLIKA

Tačke koje zadovoljavaju jednakost $|x| + |y| < 10$ nalaze se unutar dobijenog kvadrata i ima ih (gledajući po pravama x = –9, x = –8, x = –7 …, x = –1, x = 0, x = 1, … x = 8, x = 9) tačno 1 + 3 + 5 + … + 17 + 19 + 17 + … + 5 + 3 + 1 = 81 + 19 + 81 = 181.

12. Data jednačina je ekvivalentna sa $\begin{cases} 1 - x - 1 - x = ax & ako\ je\ x < -1 \\ 1 - x + 1 + x = ax & ako\ je\ -1 \le x < 1 \\ x - 1 + x + 1 = ax & ako\ je\ 1 \le x \end{cases}$.

Odrediti realni parametar a tako da jednačina $|x - 1| + |x + 1| = ax$ ima najveći mogući broj realnih Ako je $a = -2$, onda prva jednačina $-2x = ax$ ima beskonačno mnogo rešenja, jer je S = $(-\infty, 1)$.

Ako je $a \neq 0$, onda druga jednačina ima jedinstveno rešenje $x = \frac{2}{a}$.

Ako je $a = 2$, onda treća jednačina $2x = ax$ ima beskonačno mnogo rešenja,jer je S = $(1, \infty)$.

Dakle najveći broj rešenja se dobija za $a = -2$ i $a = 2$.

13. Data jednačina je ekvivalentna sa $\begin{cases} -1 - x + 2 - x + x = -x + a & ako\ je\ x < -1 \\ x + 1 + 2 - x + x = -x + a & ako\ je\ -1 \le x < 0 \\ x + 1 + 2 - x + x = x + a & ako\ je\ 0 \le x < 2 \\ x + 1 + x - 2 + x = x + a & ako\ je\ 2 \le x \end{cases}$.

Dalje se dobija, $\begin{cases} 1 = a & ako\ je\ x < -1 \\ 2x = a - 3 & ako\ je\ -1 \le x < 0 \\ 3 = a & ako\ je\ 0 \le x < 2 \\ 2x = a + 1 & ako\ je\ 2 \le x \end{cases}$ pa data jednačina ima beskonačno mnogo rešenja ako je $a = 1$, onda je S = $(-\infty, -1]$ i ako je a = 3, onda je S = [0, 2] .

14. Ako je x = 0, onda je $|y| = 13$ i ako je y = 0, onda je $|x| = 77$. Dati paralelogram je romb čije su dijagonale 26 i 154, pa je njegova površina $\frac{26 \cdot 154}{2} = 2002$.

15. Neka su traženi brojevi raspoređeni po kružnici u smeru kazalji na časovniku redom: x_1, x_2 ... x_9. Kako je svaki broj na kružnici apsolutna vrednost razlike dva naredna posmatrano u smeru kazaljki na časovniku, to su svi napisani brojevi nenegativni. Neka je $x_1 = a$ najveći od njih. Kako je a jednako apsolutnoj vrednosti razlike dva naredna broja, to je $a = |x_2 - x_3|$, to je jedan od njih, na primer $x_2 = a$, a drugi $x_3 = 0$. Jasno je da je tada i $x_2 = a = |x_3 - x_4| = |0 - x_4|$, pa je i $x_4 = a$. Slično je $x_3 = 0 = |x_4 - x_5| = |a - x_5|$ odakle je $x_5 = a$. Nastavljajući dati postupak dobiće se da je $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = x_8 = a$ i $x_3 = x_6 = x_9 = 0$. Kako je zbir svih brojeva na kružnici jednak 1, to je $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = x_8 = \frac{1}{6}$ i $x_3 = x_6 = x_9 = 0$.

16. Kako je u nekom od temena kocke smešten broj $x_1 = 1$, to su na ivicama kocke koje polaze iz tog temena raspoređeni brojevi $|x_2 - 1|$, $|x_3 - 1|$ i $|x_4 - 1|$. Kako su x_2, x_3 i x_4 različiti to su i brojevi $|x_2 - 1|$, $|x_3 - 1|$ i $|x_4 - 1|$ različiti, pa na ivicama kocke ima tri ili više različitih brojeva. Dokažimo i da postoji raspored pri kome je na ivicama kocke raspoređeno tačno tri broja. To je raspored gde su u temenima osnove kocke A, B, C i D redom raspoređeni brojevi 1, 2, 3 i 4 a u odgovarajućim temenima gornje osnove A_1, B_1, C_1 i D_1 brojevi 5, 6, 7 i 8.
Tada su na ivicama kocke razmešteni brojevi 1 (6 puta), 3 (2 puta) i 4 (4 puta).

17. Najmanja moguća vrednost izraza je 1 i dobija se kao $||...|| 3 - 5 | - 6 | - 4 | - ... | - 2007 | - 2009 | - 2008 | - 2006 | - 1 | - 2 | = 1$, jer za svaki prirodan broj k (k > 1) i za četiri uzastopna prirodna broja $4k - 1$, $4k$, $4k + 1$ i $4k + 2$, važi jednakost $||| (4k - 1) - (4k + 1) | - (4k + 2) | - 4k | = || 2 - (4k + 2) | - 4k | = || 2 - 4k - 2 | - 4k | = | 4k - 4k | = 0$.

Najveća moguća vrednost izraza je 2009 i dobija se kao $||...|| 3 - 5 | - 4 | - 2 | - ... | - 2007 | - 2009 | - 2008 | - 2006 | - 2010 | - 1 | = 2009$, jer za svaki prirodan broj k (k > 1) i za četiri uzastopna prirodna broja $4k - 2$, $4k - 1$, $4k$ i $4k + 1$, važi jednakost $||| (4k - 1) - (4k + 1) | - 4k | - (4k - 2) | = || 2 - 4k | - (4k - 2) | = || 4k - 2 - 4k + 2 | = 0$

Najmanja vrednost izraza ne može biti 0, a najveća ne može biti 2010, dakle parna, jer je ma kako raspoređivali date brojeve, ostaje nepromenjiva neparnost njihovog zbira, odnosno razlike pošto kada se u izrazu $1 + 2 + ... + 2009 + 2010 = 2011 \cdot 1005$ (čija je vrednost neparna) bilo koji znak ’’+’’ zameni sa ’’–’’ neparnost izraza se ne menja.